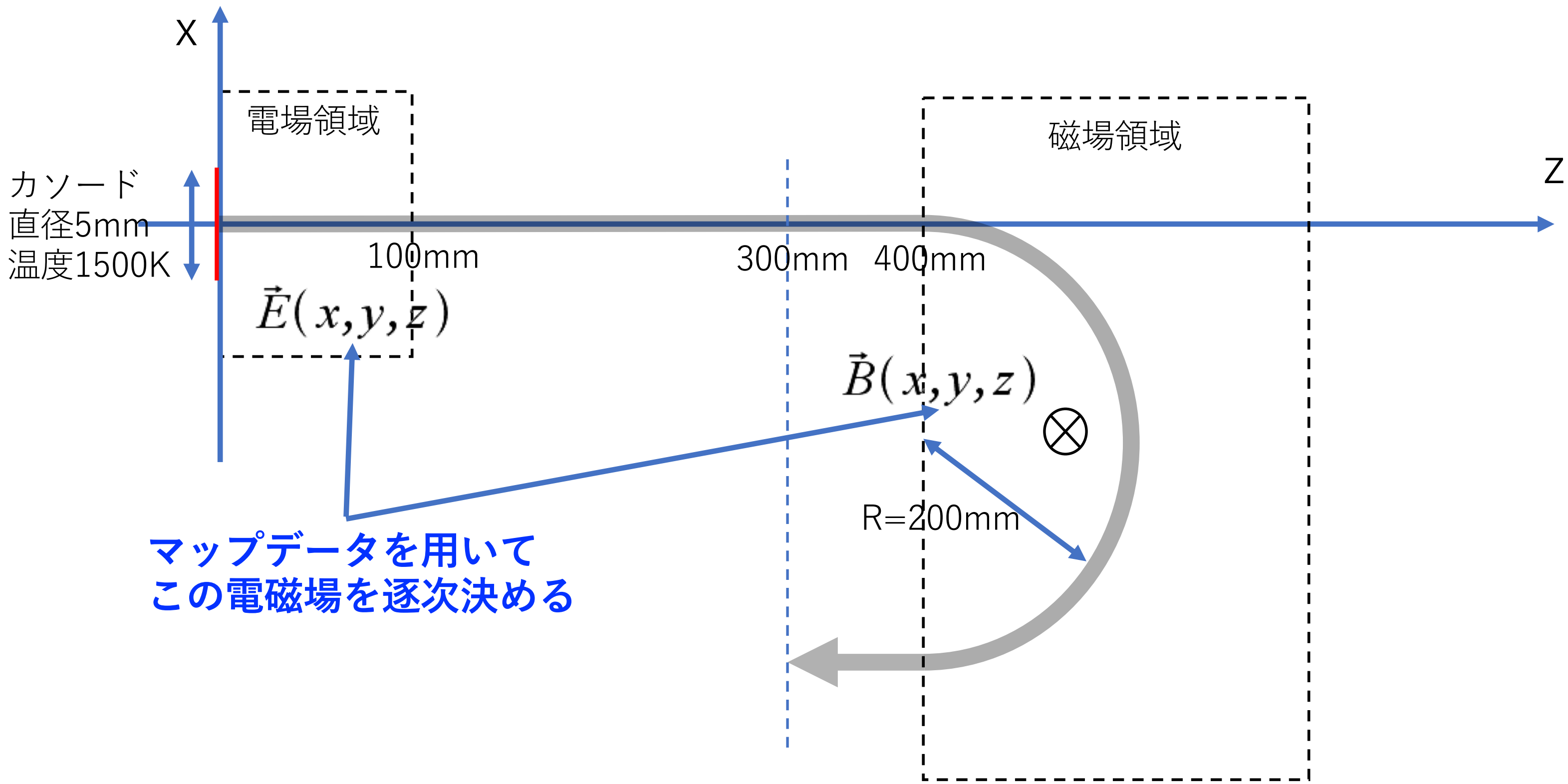
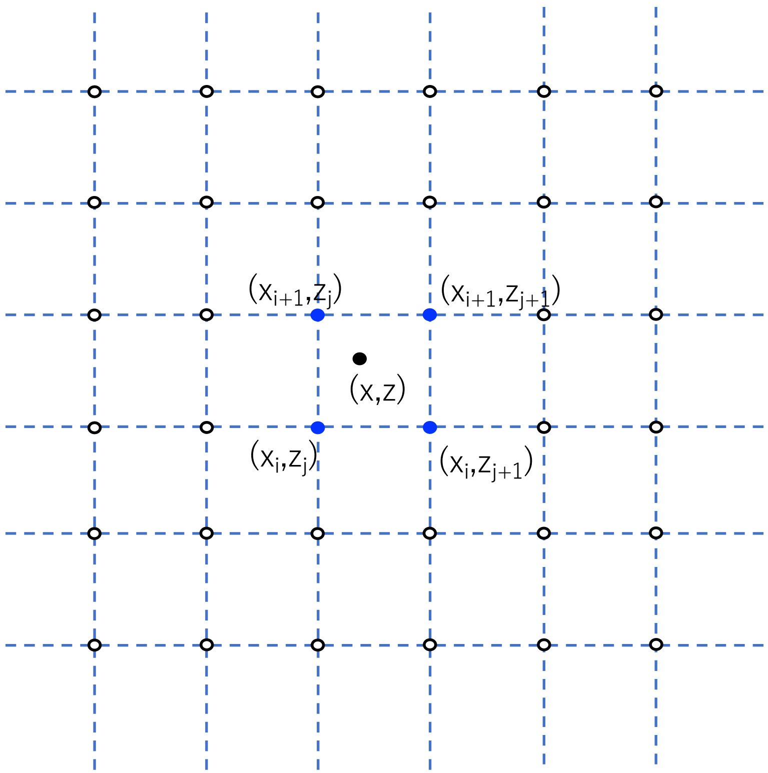
電磁場マップデータから任意の位置(x,z)における電磁場を求める

静電磁場だが位置の関数として変化する電磁場

有限要素法による計算、または実測定によって得られた離散的電磁場データを用いて
いかにして任意の位置(x,z)における電磁場の値をより正しくもとめるか





電磁場を計算すべき座標はメッシュのノードとは限らない

(x,z)の直近の周囲のデータを用いて補間内挿する

ローカルなメッシュ内でのみ成り立つ関数を求める

ただしフィッティングではない

内挿した電磁場（関数）は隣のノードとなめらかに接続

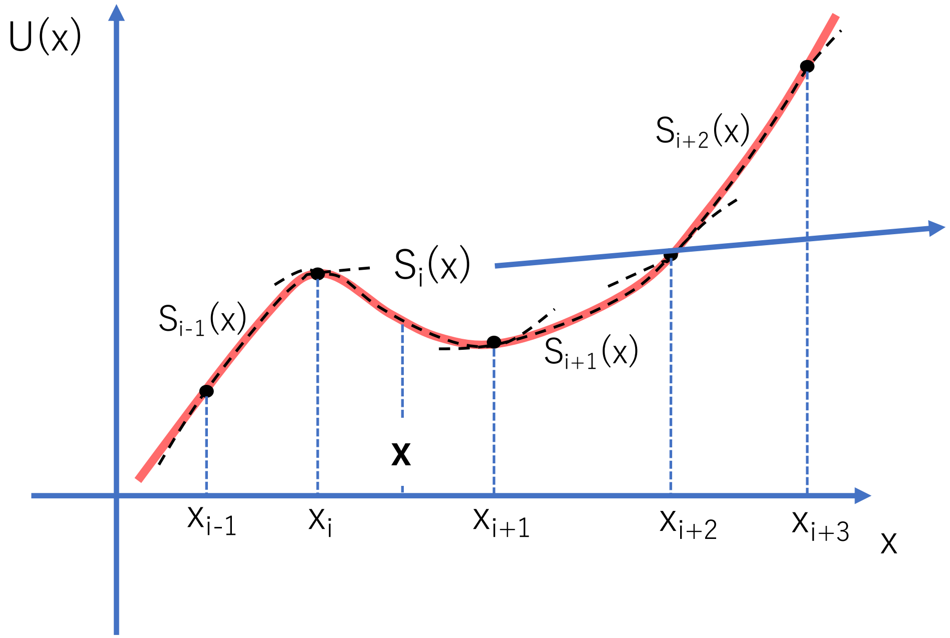
各ノードのデータを完全に信用する

補間法

Lagrange補間法、Newton補間法、Gauss補間法、**スプライン補間法**、etc

このような補間計算をプログラムに組み込み、Runge-Kutta計算において
１ステップごとに逐次計算を行いその都度電磁場を計算する

スプライン補間法（区分的多項式：一般に３次多項式を用いる）



$S_i(x)$は３次多項式

範囲(x_i, x_{i+1})でのみ成り立つ補間関数

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

連続の条件

① $S_i(x_i) = U(x_i) = a_i$

ノードではデータ$U(x_i)$に等しい

② $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) = U(x_{i+1}) = a_{i+1}$

隣のノードと連続する

③ $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) = b_{i+1}$

一階微分が連続

④ $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}) = c_{i+1}$

二階微分が連続

データはn+1個（ i=0~n）ある場合、各区間のスプライン関数$S_i(x)$の係数（a_i, b_i, c_i, d_i）の関係式は

① $a_i = U(x_i)$

② $a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3$　　$(h_i = x_{i+1} - x_i \,, a_n = U(x_n))$

③ $b_{i+1} = b_i + c_i h_i + d_i h_i^2$　　$(b_n = S_n'(x_n))$

④ $c_{i+1} = c_i + d_i h_i$　　$\left(c_n = \dfrac{S_n''(x_n)}{2}\right)$

これらの式からb_iとd_iを消去してまとめると

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{3(a_i - a_{i-1})}{h_{i-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ h_0 & 2(h_1+h_0) & h_1 & & & & 0 \\ \vdots & h_1 & 2(h_2+h_1) & h_2 & & & 0 \\ & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-1}+h_{n-2}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3(a_2 - a_1)}{h_1} - \dfrac{3(a_1 - a_0)}{h_0} \\ \dfrac{3(a_3 - a_2)}{h_2} - \dfrac{3(a_2 - a_1)}{h_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{3(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}} - \dfrac{3(a_{n-1} - a_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

逆行列を求めてc_iベクトルを決めると上の①～④によりその他の係数が決まる

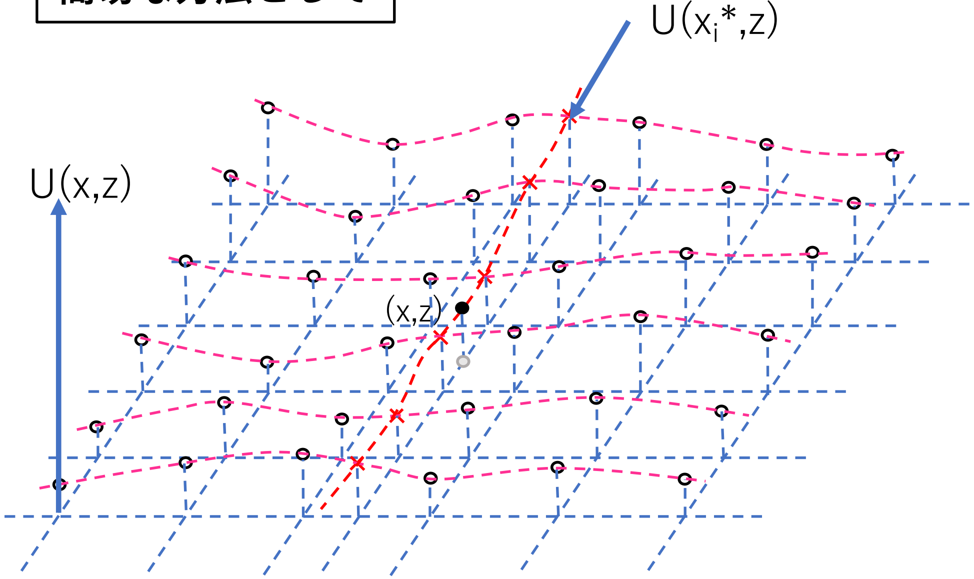
二次元マップのデータから補間するには

真っ当にやろうとすると、二次元３次多項式　$S_{ij}(x,z)=\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}c_{ij}(k,l)(x-x_i)^{k-1}(z-z_j)^{l-1}$

を用いて同じことをすれば良い（項が多くてかはり煩雑、真っ当にこれをするプログラムはすぐに見つけられる）

必要と条件に応じて

簡易な方法として



例

① 水平軸(z)に沿って　印の座標におけるU(x_i*,z)値を求める

② その値を使って垂直軸(x)にそってU(x,z)を求める

求めた３次関数はxの関数となる

$$S_i(x)$$

S(x)が静電ポテンシャルなら、x方向の電場は

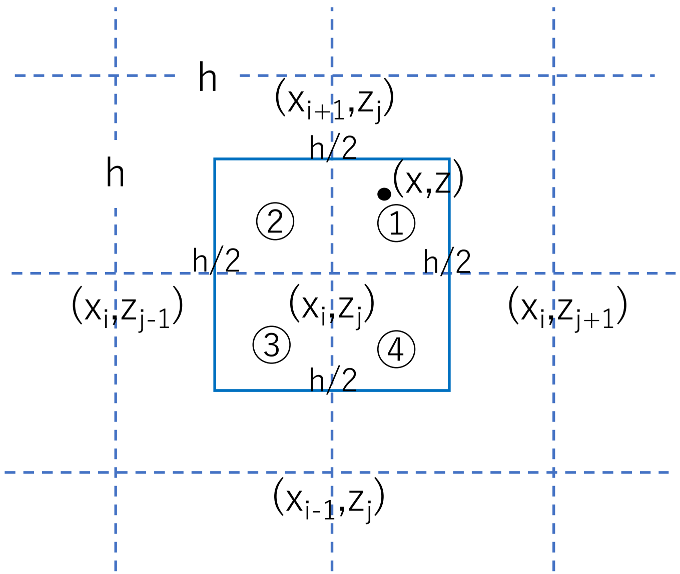
$$E_x=-\frac{\partial S}{\partial x}$$

③ ①、②を順序を変えて同じことをして　$S(z)$ を求めれば

z方向の電場は

$$E_z=-\frac{\partial S}{\partial z}$$

正方格子（メッシュ）であれば



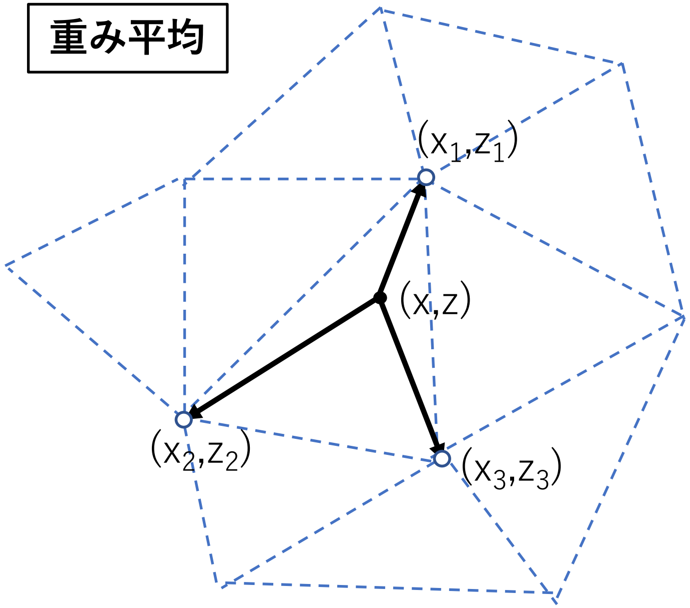
直近のノード(x_i,z_j)の周囲のメッシュ格子の中のh/2で囲まれた領域を①～④に分割して考える

(x,z)が①領域にある場合

$$U(x,z) = U(x_i,z_j) + \frac{U(x_{i+1},z_j) - U(x_i,z_j)}{h}(x - x_i) + \frac{U(x_i,z_{j+1}) - U(x_i,z_j)}{h}(z - z_j)$$

②～④も同様

重み平均



(x,z)近傍の点（最低直近の３点）の重み平均をとる
重みはいろんな取り方がある。

(距離の重み)　$w_k = \frac{1}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (z - z_k)^2}}$

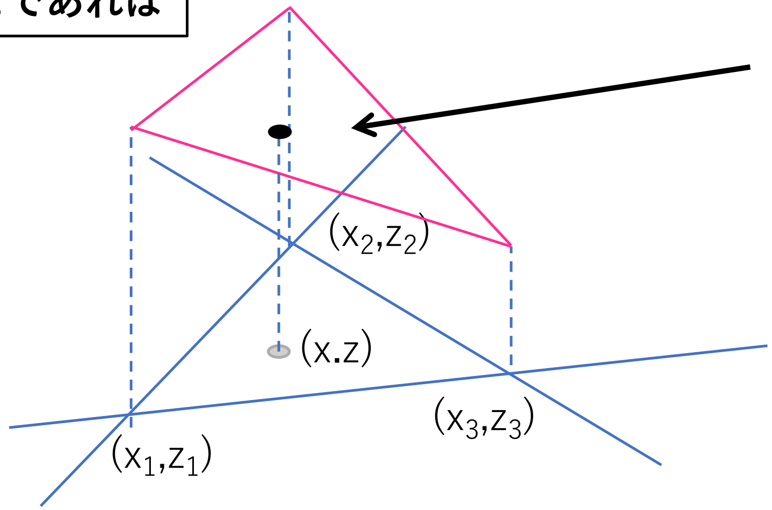
$$U(x,z) = \frac{\sum_k w_k U(x_k,z_k)}{\sum_k w_k}$$

周囲の点の数を増やすとより滑らかな接続で計算できる

さらに簡易な方法

周囲との連続条件を考慮していないのでエラーの蓄積が増加するが、
メッシュが十分小さければ概ね問題ない

三角メッシュであれば

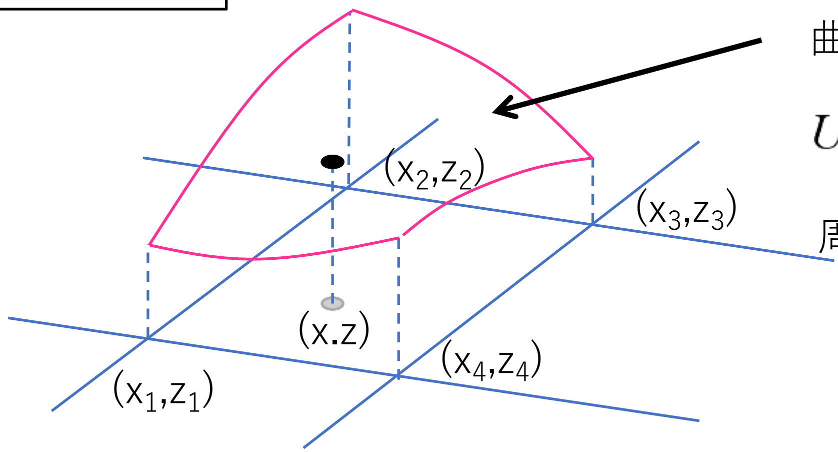


平面の方程式

$$U(x,z) = a\,x + b\,z + c$$

周囲３点とその$U(x_i,z_i)$から(a,b,c)を決定

四角メッシュであれば



曲面の方程式（干渉項を入れて）

$$U(x,z) = a\,x + b\,z + c\,x\,z + d$$

周囲４点とその$U(x_i,z_i)$から(a,b,c,d)を決定