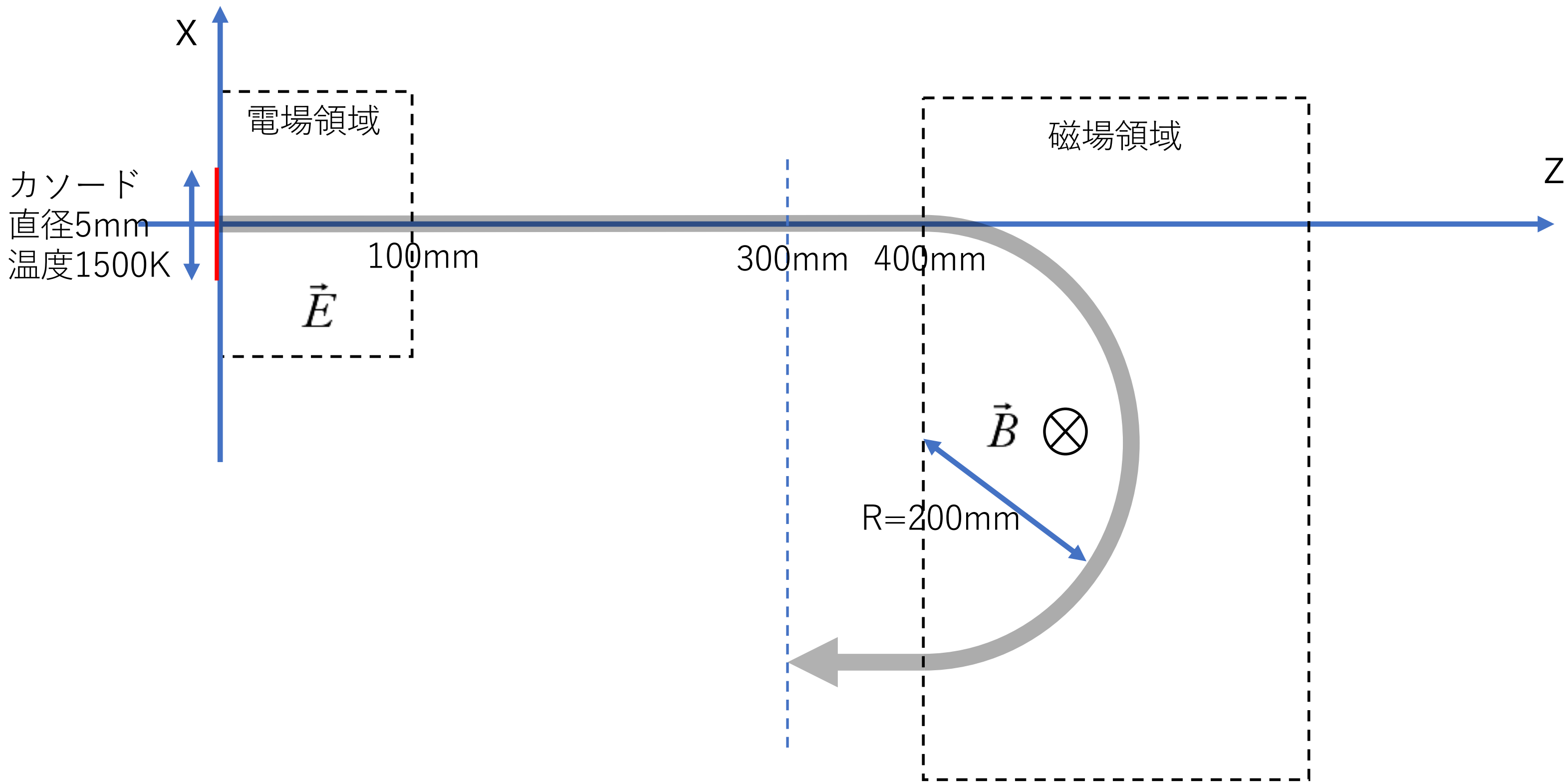
電磁場の中での電子ビーム輸送シミュレーションを行う

１：定電磁場で計算

カソード面から発した電子を静電場　（電場領域）で50keVまで加速し直進した電子が静磁場（磁場領域）で180°偏向され、磁場領域を脱出してz=100mmの場所まで

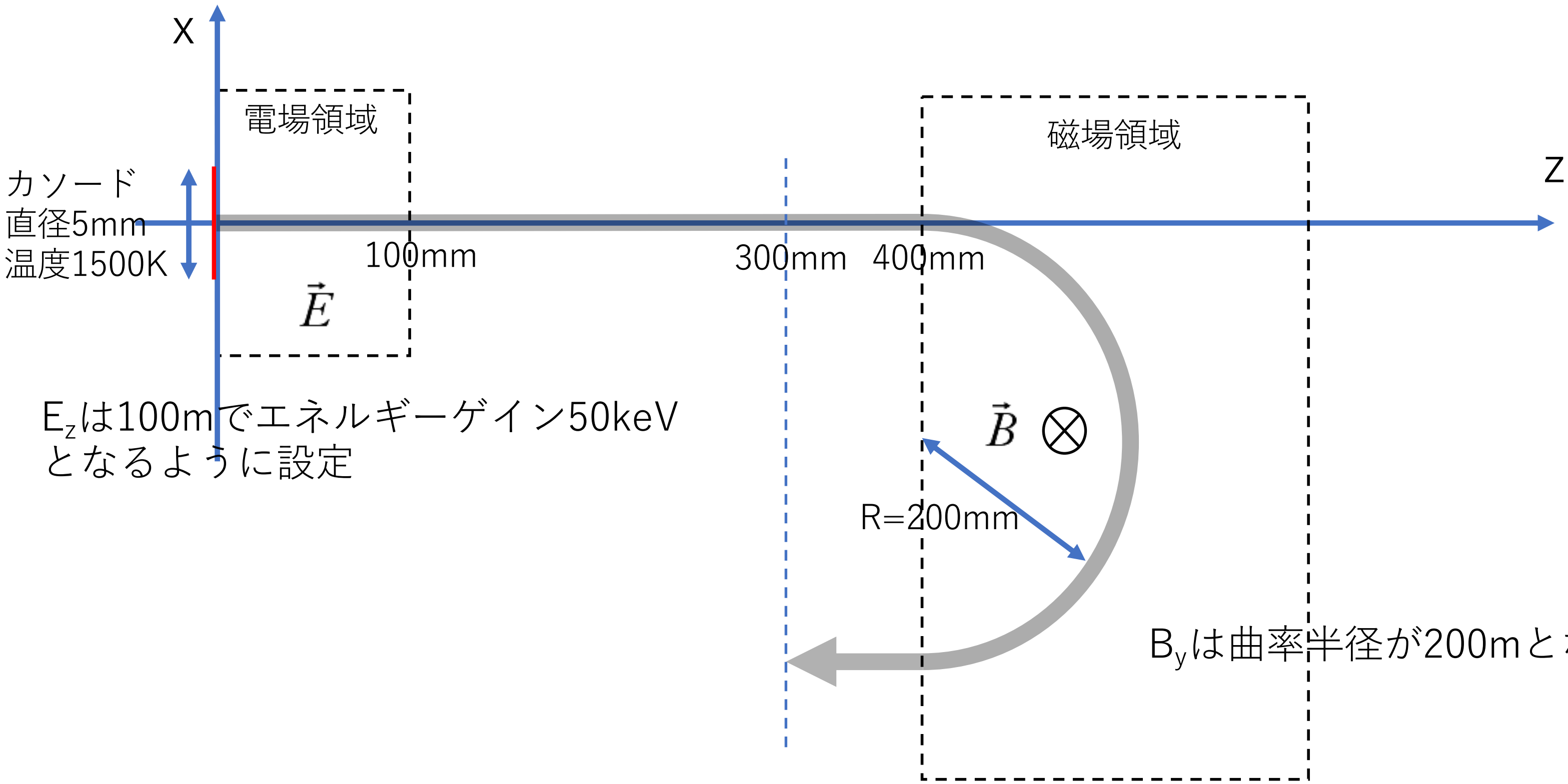


運動方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{e}{\gamma m_e}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \end{cases}$$

今回は二次元平面(x,z)内で解く　$\vec{E} = (E_x, 0, E_z) = \left(0, 0, \frac{V}{d}\right)$　$\vec{B} = (0, B_y, 0)$

この程度なら簡単な手計算でもできるが、これを**4次のRunge-Kutta法**で数値的に解く



E_zは100mでエネルギーゲイン50keV
となるように設定

B_yは曲率半径が200mとなるように

Runge-Kutta法

独立変数xで記述される関数 $y(x)$ のx=x+hの値を $y(x)$ を用いて表すと（hが小さいとしてテーラー展開）

$$y(x+h) = y(x) + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \cdots$$

（1次まで止めるのは**オイラー法**）

$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ として

$$y(x+h) = y(x) + f(x,y)h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f\right)h^2 + \cdots$$ として真面目に計算するのが**テーラー法**

関数によっては二次微分などがなかなか複雑なので、二次微分など取らずに計算機で素早く計算するために

$$\left.\begin{aligned}
a &= f(x_0, y_0) \\
b &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}a\right) \\
c &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}b\right) \\
c &= f(x_0 + h, y_0 + hc)
\end{aligned}\right\}\ \textbf{4次のRunge-Kutta法}$$

$$\Delta y = y_1 - y_0 = \frac{1}{6}(a + 2b + 2c + d)$$ $\Rightarrow$ ４次のテーラー展開と一致するよう決められた係数

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{\gamma m_e}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$$

の場合は連立微分方程式

初期値設定 $(\vec{x}_0, \vec{v}_0, e_0, p_0, \beta_0, \gamma_0)$ などの必要な粒子情報

⇩

（γ に注意）

$$\vec{a}_v = \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}_0|}{c}}\frac{e}{m_e}(\vec{E}(\vec{x}_0) + \vec{v}_0 \times \vec{B}(\vec{x}_0))$$

$$\vec{a}_x = \vec{v}_0$$

$$\vec{b}_v = \sqrt{1 - \frac{\left|\vec{v}_0 + \frac{\Delta t}{2}\vec{a}_v\right|}{c}}\frac{e}{m_e}\left(\vec{E}\left(\vec{x}_0 + \frac{\Delta t}{2}\vec{a}_x\right) + \left(\vec{v}_0 + \frac{\Delta t}{2}\vec{a}_v\right) \times \vec{B}\left(\vec{x}_0 + \frac{\Delta t}{2}\vec{a}_x\right)\right)$$

$$\vec{b}_x = \vec{v}_0 + \frac{\Delta t}{2}\vec{a}_v$$

$$\vec{c}_v = \sqrt{1 - \frac{\left|\vec{v}_0 + \frac{\Delta t}{2}\vec{b}_v\right|}{c}}\frac{e}{m_e}\left(\vec{E}\left(\vec{x}_0 + \frac{\Delta t}{2}\vec{b}_x\right) + \left(\vec{v}_0 + \frac{\Delta t}{2}\vec{b}_v\right) \times \vec{B}\left(\vec{x}_0 + \frac{\Delta t}{2}\vec{b}_x\right)\right)$$

$$\vec{c}_x = \vec{v}_0 + \frac{\Delta t}{2}\vec{b}_v$$

$$\vec{d}_v = \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}_0 + \Delta t\vec{c}_v|}{c}}\frac{e}{m_e}(\vec{E}(\vec{x}_0 + \Delta t\vec{c}_x) + (\vec{v}_0 + \Delta t\vec{c}_v) \times \vec{B}(\vec{x}_0 + \Delta t\vec{c}_x))$$

$$\vec{d}_x = \vec{v}_0 + \Delta t\vec{c}_v$$

⇨

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \frac{\Delta t}{6}(\vec{a}_v + 2\vec{b}_v + 2\vec{c}_v + \vec{d}_v)$$

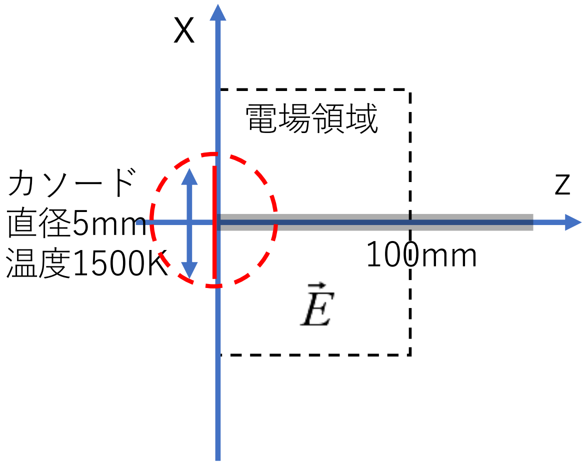
$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \frac{\Delta t}{6}(\vec{a}_x + 2\vec{b}_x + 2\vec{c}_x + \vec{d}_x)$$

⇩

粒子情報の書き直し

$(\vec{x}_1, \vec{v}_1, e_1, p_1, \beta_1, \gamma_1)$

繰り返し



初期値設定　$(\vec{x}_0, \vec{v}_0, e_0, p_0, \beta_0, \gamma_0)$

直径5mmのカソード面(z=0)から出発
温度1500K → [eV]にすると？
　出発点であるカソードの条件

$$\vec{x}_0 = (x_0, z_0 = 0)$$

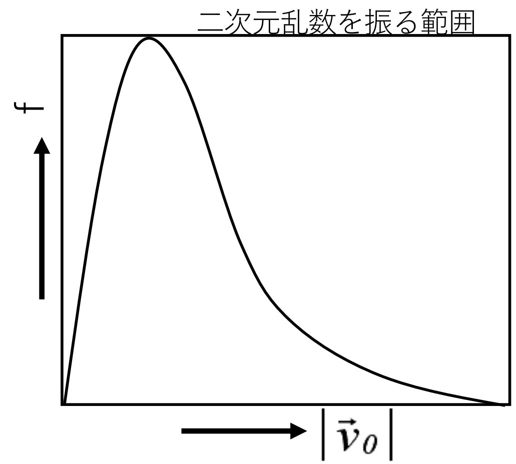
x_0分布は±2.5mm内で一様分布（一様分布乱数により決定）

$$\vec{v}_0 = (v_x, v_z)$$

カソード温度によるボルツマン速度分布によって確率的に$|\vec{v}_0|$を乱数で決定

$$f(|\vec{v}_0|) = 4\pi|\vec{v}_0|^2\left(\frac{m_e}{2\pi k_B T}\right)exp\left(-\frac{m_e|\vec{v}_0|^2}{2k_B T}\right)$$

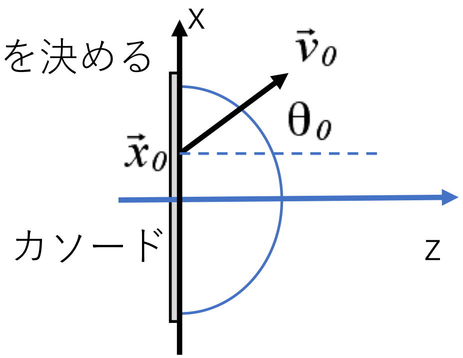
（例えばピーク値を1に
規格化して使用）



二次元乱数 $(|\vec{v}_0|, f)$ を振って $f < f(|\vec{v}_0|)$ となる$|\vec{v}_0|$を採用

速度方向は-90° ~90° の範囲で一様なので、一様乱数で θ_0 を決める

$$\vec{v}_0 = (v_x, v_z) = (|\vec{v}_0|sin\theta_0, |\vec{v}_0|cos\theta_0)$$



プログラミング

自分のコンピュータにプログラミング環境を整える

適当な言語でプログラミングをするアルゴリズムを考え組み立てる

場の値を決める、微分方程式計算、runge-Kuttaプロセスなど動作単位ごとに独立に関数化しておき状況の変化（微分方程式の形が変わるなど）に汎用的に使える構造としておく

たくさんの粒子に対して計算する（粒子情報は配列化）

時間ステップ(Δt)の大きさに注意、大きすぎると不正確になる。
少しづつステップを小さくして、ステップによる軌道の変化が無視できるようになることを確認する

途中途中の計算の結果を適切にデータとして格納しgnuplotなどで作図できるようにして、(x,z)空間、(x,v_x)、(z,v_z) 空間などでのプロットができるようにする

単位系に注意（vは[m/s]、xは[mm]、eは[eV]、pは[eV/c]、等で表す）

次のステップ

電場、磁場が固定値ではなく、計算値、実測値で得られたマップデータに基づいて逐次導出しながらRunge-Kutta計算を回す